TEMA 1.1

MATEMÁTICAS CCSS · 2.º Bachillerato · PAU 2027

Conceptos de probabilidad. Álgebra de sucesos

El lenguaje con el que se habla de probabilidad en todo el bloque: sucesos, operaciones entre ellos y las fórmulas que se usan en cada tipo de pregunta de la PAU.

Contenido del tema

1. De la certeza a la probabilidad . . . 2
2. Espacio muestral y sucesos . . . 2
3. La regla de Laplace . . . 3
4. Operaciones con sucesos . . . 4
5. Las fórmulas del tema . . . 5
6. Compatibles no es lo mismo que independientes . . . 8
7. Cómo se pregunta esto en la PAU y cómo se responde . . . 8
8. Ejercicios resueltos . . . 9
9. Resumen operativo . . . 13

Edición, ampliación y maquetación: Academia Pitágoras.

© Isaías Dávila Delgado · Academia Pitágoras. Material de uso exclusivo del alumnado matriculado. Prohibida su reproducción y distribución.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

1. De la certeza a la probabilidad

Hasta ahora las matemáticas que has hecho eran **deterministas**. Dos más dos son cuatro, y no hay discusión. Si resuelves la ecuación $2x + 3 = 5$, el resultado es $x = 1$, siempre, para todo el mundo y en cualquier examen. El resultado está fijado por los datos.

Este bloque funciona de otra manera. Aquí trabajamos con experimentos cuyo resultado *no* está fijado de antemano, y en lugar de certezas calculamos **probabilidades**: una medida de lo posible que es cada resultado.

Definición 1.1 · *Experimento aleatorio*

Un experimento es **aleatorio** cuando, repitiéndolo en las mismas condiciones, no se puede predecir con certeza cuál de sus resultados posibles va a salir. Lanzar un dado o una moneda son los ejemplos clásicos.

Hay experimentos que llamamos *pseudoaleatorios* porque el resultado depende también de la habilidad de quien los ejecuta: lanzar a canasta en una cancha de baloncesto, por ejemplo. Puedes anotar o fallar, y no hay certeza de lo que va a pasar; lo único que se puede hacer es experimentar, anotar resultados y trabajar con las probabilidades que salgan de ahí.

Este tema es el vocabulario del bloque, y por eso va primero. Aquí montamos las definiciones y las fórmulas, y se practican sobre datos que da el enunciado. Los **diagramas de árbol**, la **probabilidad total** y el **teorema de Bayes** tienen su propio tema, el siguiente, porque es donde de verdad se usan estas herramientas en los problemas de examen. Las **tablas de contingencia** van en el tema intermedio.

2. Espacio muestral y sucesos

Antes de calcular nada hay que saber *sobre qué* calculamos. Y eso obliga a fijar tres palabras.

Definición 2.1 · *Espacio muestral*

El **espacio muestral** de un experimento, que escribimos E, es el conjunto de todos los resultados que se pueden producir al realizarlo.

Definición 2.2 · *Suceso elemental*

Cada uno de los resultados individuales contenidos en el espacio muestral es un **suceso elemental**.

El número de sucesos elementales depende por completo del experimento:

- Lanzar un dado cúbico de seis caras: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, con **seis** sucesos elementales.
- Lanzar una moneda: $E = \{C, X\}$, con **dos**. Fíjate en que los sucesos elementales no tienen que ser números; pueden ser cualidades o letras.
- Lanzar dos monedas a la vez: $E = \{CC,\ CX,\ XC,\ XX\}$, con **cuatro**. Ojo aquí: *cara y cruz* y *cruz y cara* son dos resultados distintos, porque las monedas se distinguen.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

Definición 2.3 · *Suceso*

Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral, es decir, un grupo de sucesos elementales que cumplen una característica descrita en el enunciado. Se nombran con letras mayúsculas: A, B, C…

A partir de un mismo espacio muestral se pueden definir tantos sucesos como se quiera. Vamos a fijar tres sobre el dado, porque son los que usaremos en todo el tema.

Ejemplo 2.4 · *Los tres sucesos de referencia*

Experimento: lanzar un dado. Espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$A =$ «salir par» $= \{2, 4, 6\}$, $B =$ «salir múltiplo de 3» $= \{3, 6\}$, $C =$ «salir impar» $= \{1, 3, 5\}$.

A tiene tres sucesos elementales, B tiene dos y C tiene tres. Podríamos haber definido «salir mayor que dos», «salir múltiplo de dos» o cualquier otra cosa: el suceso lo decide el enunciado, no el dado.

Idea clave. Antes de escribir una sola fórmula, escribe qué es cada suceso y cuántos casos tiene. La mitad de los errores de este bloque no son de cálculo: son de haber contado mal los casos de un suceso.

3. La regla de Laplace

Es la fórmula madre del tema y la que más veces vas a usar en todo el curso.

Teorema 3.1 · *Regla de Laplace*

Si todos los sucesos elementales de un experimento son igualmente probables, la probabilidad de un suceso A es

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{CF}}{\text{CP}}.$$

Los **casos favorables** son los sucesos elementales que pertenecen a A. Los **casos posibles** son todos los del espacio muestral.

Ejemplo 3.2 · *Probabilidad de par y de múltiplo de 3*

Con los sucesos de referencia:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\,\%, \qquad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}3333 = 33{,}33\,\%.$$

En el primer caso los favorables son 2, 4 y 6; en el segundo, 3 y 6. Los posibles son siempre los seis del espacio muestral.

Una probabilidad se puede expresar de tres formas equivalentes: **fracción**, **número decimal** y **porcentaje**. Del decimal al porcentaje se pasa multiplicando por 100. En los cálculos trabajaremos siempre en **tanto por uno**, es decir, con el decimal, porque es lo que exigen las fórmulas.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

Propiedad 3.3 · *Rango de una probabilidad*

Para cualquier suceso A se cumple $0 \leq P(A) \leq 1$. El 0 corresponde al suceso imposible y el 1, al suceso seguro, que es el $100\,\%$.

Idea clave. Si te sale una probabilidad de $1{,}3$ o negativa, no sigas: hay un error y hay que volver atrás. Es la comprobación más rápida y más rentable de todo el bloque, y en algunas comunidades el propio criterio de corrección premia que detectes el resultado imposible.

3.1. El diagrama de Venn

Conviene acostumbrarse desde el primer día a dibujar lo que se calcula. Imagina el espacio muestral como una caja que contiene todos los casos posibles, colocados en desorden, y cada suceso como una burbuja que rodea los casos que le pertenecen. Calcular $P(A)$ es entonces calcular «cuánto ocupa» la burbuja de A dentro de la caja.

Parece elemental con un solo suceso, y lo es. Su utilidad aparece en cuanto empezamos a combinar sucesos: hay preguntas que se resuelven en diez segundos mirando el dibujo y que sin él se convierten en un lío de fórmulas.

4. Operaciones con sucesos

Aquí empieza lo que de verdad se pregunta. Combinar sucesos es traducir el enunciado a operaciones, y casi todo el trabajo está en leer bien dos palabras.

Definición 4.1 · *Unión e intersección*

La **unión** $A \cup B$ es el suceso «ocurre A **o** ocurre B»: le pertenecen los casos que estén en A, en B o en los dos.
La **intersección** $A \cap B$ es el suceso «ocurre A **y** ocurre B», es decir, los dos al mismo tiempo: le pertenecen solo los casos comunes.

Idea clave. La diferencia entre la unión y la intersección es el nexo del enunciado: «**o**» es unión, «**y**» es intersección. Parece una tontería y es el error más repetido del bloque, porque ese nexo aparece escondido en una frase larga y cambia el ejercicio por completo.

Ejemplo 4.2 · *Unión e intersección sobre el dado*

Con $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{3, 6\}$, en el diagrama de Venn las dos burbujas se solapan: comparten el caso 6.

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\} \;\Rightarrow\; P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \qquad A \cap B = \{6\} \;\Rightarrow\; P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

La unión abarca las dos burbujas completas; la intersección, solo la zona de solape.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

Definición 4.3 · *Suceso contrario*

El **suceso contrario** de A, que escribimos $\overline{A}$, es el que ocurre exactamente cuando no ocurre A. En el diagrama de Venn es todo lo que queda fuera de la burbuja.

Según la comunidad y el libro de texto, el contrario aparece escrito como $\overline{A}$, A' o A^c. Significan lo mismo. Y en algunos enunciados verás $A - B$, que es «A pero no B», es decir, $A \cap \overline{B}$.

Definición 4.4 · *Sucesos compatibles e incompatibles*

Dos sucesos son **incompatibles** cuando no pueden ocurrir a la vez, es decir, cuando su intersección es el conjunto vacío: $A \cap B = \varnothing$ y por tanto $P(A \cap B) = 0$. Si sí pueden ocurrir a la vez, son **compatibles**.

Ejemplo 4.5 · *Compatibles frente a incompatibles*

$A = \{2,4,6\}$ y $B = \{3,6\}$ son **compatibles**: comparten el 6, así que sus burbujas se solapan.
$A = \{2,4,6\}$ y $C = \{1,3,5\}$ son **incompatibles**: no hay forma de que al lanzar un dado salga par e impar al mismo tiempo, así que las burbujas están separadas y $A \cap C = \varnothing$.

5. Las fórmulas del tema

Las operaciones anteriores se pueden calcular de dos maneras, y saber cuándo usar cada una es media asignatura.

Por la regla de Laplace, contando casos, cuando el enunciado te deja ver el espacio muestral y los sucesos, como en los ejemplos del dado.

Por fórmula, cuando el enunciado no te da los casos, sino directamente unas probabilidades. Este es el formato habitual del examen.

5.1. Probabilidad del suceso contrario

Propiedad 5.1 · *Suceso contrario*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Sale de que la probabilidad total es 1, el $100\,\%$: si quieres la parte de fuera de la burbuja, se la restas al total. Con los sucesos de referencia, $P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ y $P(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

5.2. Probabilidad de la unión

Propiedad 5.2 · *Unión de dos sucesos*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

y si A y B son **incompatibles**, como entonces $P(A \cap B) = 0$, queda la suma directa:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

El motivo de restar la intersección se ve en el diagrama: al sumar las dos burbujas completas, la zona de solape se ha contado dos veces, así que hay que descontarla una.

5.3. Probabilidad de la intersección

Propiedad 5.3 · *Intersección de dos sucesos*

Si A y B son **independientes**:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Si son **dependientes**, que es el caso habitual en los problemas de examen:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B).$$

Definición 5.4 · *Sucesos independientes*

Dos sucesos son **independientes** cuando el hecho de que ocurra uno no modifica la probabilidad del otro. Suele pasar cuando vienen de experimentos distintos o cuando no tienen nada que ver entre sí.

Fíjate en que la fórmula del producto *define* la independencia: comprobar si dos sucesos son independientes consiste en comprobar si $P(A \cap B)$ coincide con $P(A) \cdot P(B)$. Si coincide, lo son; si no, son dependientes. Es una pregunta de examen muy frecuente.

5.4. Probabilidad condicionada

Definición 5.5 · *Probabilidad condicionada*

$P(A \mid B)$ se lee «probabilidad de A **sabiendo que** ha ocurrido B», y se calcula

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Lo que va *debajo de la raya* es la condición.

Lo que hace la condición es cambiar el espacio muestral: los casos posibles ya no son todos, sino solo los del suceso que condiciona. Se ve muy bien contando casos.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

Ejemplo 5.6 · *Condicionada contando casos*

«Sabiendo que ha salido múltiplo de 3, ¿qué probabilidad hay de que además sea par?» Es $P(A \mid B)$. Los casos posibles ya no son seis: son los dos de B, o sea 3 y 6. Y de esos dos, los favorables son los que además están en A: solo el 6. Por tanto

$$P(A \mid B) = \frac{1}{2}.$$

Por fórmula sale lo mismo: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/6}{1/3} = \dfrac{1}{2}$.

Cuidado con el nombre. Esta fórmula es la *definición* de probabilidad condicionada. El **teorema de Bayes** es la fórmula que permite darle la vuelta a la condición, pasar de $P(B \mid A)$ a $P(A \mid B)$, y se estudia en el tema siguiente junto a los diagramas de árbol y la probabilidad total. Muchas comunidades lo nombran expresamente en sus orientaciones, así que conviene no confundir las dos cosas.

5.5. Las leyes de Morgan

Son la herramienta para los enunciados con negaciones, que son muy habituales.

Propiedad 5.7 · *Leyes de Morgan*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Combinadas con la ley del contrario, dan las dos igualdades que de verdad se usan:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B), \qquad P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B).$$

En un enunciado aparecen así:

- «**ni** A **ni** B» es $\overline{A} \cap \overline{B}$, y se calcula como $1 - P(A \cup B)$.
- «**no** A **o no** B» es $\overline{A} \cup \overline{B}$, y se calcula como $1 - P(A \cap B)$.

Idea clave. Las leyes de Morgan solo sirven cuando *los dos* sucesos están negados. Una intersección mixta, del tipo $A \cap \overline{B}$, no se toca con Morgan: se resuelve con el diagrama de Venn, y siempre da lo mismo,

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B),$$

que es «la burbuja de A menos el trozo que comparte con B». Esa media luna aparece en casi todos los ejercicios de examen con condicionadas negadas.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

6. Compatibles no es lo mismo que independientes

Es la confusión número uno del tema, y merece su propia sección porque cuesta puntos todos los años.

- **Compatibles o incompatibles** habla de si los sucesos **pueden coincidir**: si su intersección es vacía o no. Es una cuestión de solape en el diagrama de Venn.
- **Dependientes o independientes** habla de si uno **influye** en la probabilidad del otro. Es una cuestión de cálculo: se comprueba con $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Dos sucesos incompatibles con probabilidades no nulas son siempre dependientes, porque si sabes que ha ocurrido uno, la probabilidad del otro pasa a ser cero. Pero dos sucesos compatibles pueden ser dependientes o independientes, y eso hay que comprobarlo, no suponerlo.

> Del mismo modo, una fórmula por cada caso: la suma directa $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ solo vale para **incompatibles**, y el producto $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ solo vale para **independientes**. Usarlas cuando no toca es el error que más veces invalida un ejercicio entero.

7. Cómo se pregunta esto en la PAU y cómo se responde

Este tema casi nunca es un ejercicio completo por sí solo: es el primer apartado de la pregunta de probabilidad, o el ejercicio entero cuando la comunidad lo plantea de forma abstracta. El bloque de probabilidad y estadística vale entre el $30\,\%$ y el $50\,\%$ de la nota según la comunidad, y es además el bloque que ninguna deja fuera.

7.1. Los tres formatos de pregunta

1. **Abstracto con datos cruzados.** Te dan tres o cuatro probabilidades —típicamente $P(A)$, $P(A \cup B)$ y alguna con contrarios— y te piden otra, o que compruebes si son independientes. Se resuelve encadenando la ley del contrario, Morgan y la fórmula de la unión. Es el formato de Madrid, Aragón, La Rioja y el País Vasco.
2. **Álgebra de sucesos por apartados.** Cinco o seis apartados cortos, de $0{,}25$ a $0{,}5$ puntos cada uno, cada uno con una combinación distinta. En Madrid apareció así en la convocatoria extraordinaria de 2026 y en Castilla y León es formato habitual.
3. **Contextualizado.** Un enunciado con porcentajes reales —alumnos que practican deportes, clientes de un servicio, piezas defectuosas— del que hay que extraer los sucesos y sus probabilidades. Es el formato dominante en Canarias, Extremadura, Murcia y Castilla-La Mancha, y el que más se parece al examen real.

7.2. La plantilla de respuesta

Funciona siempre, y en varias comunidades cada paso puntúa por separado.

1. **Define los sucesos por escrito**, con su letra: «sea F = jugar al fútbol». En Baleares y Madrid se penaliza expresamente no hacerlo, y en Castilla y León «expresar la información en forma de sucesos y probabilidades» es un apartado con nota propia.
2. **Traduce cada dato del enunciado** a una probabilidad, y fíjate en cuáles son condicionadas. Un «de los que hacen X, el $50\,\%$ hace Y» no es $P(Y)$: es $P(Y \mid X)$.
3. **Escribe qué te piden** en lenguaje de sucesos antes de calcular. «Ninguno de los dos» es $\overline{A} \cap \overline{B}$, no $\overline{A \cap B}$.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

4. **Elige la fórmula** y justifica por qué esa: si usas el producto, di que son independientes y por qué lo sabes.
5. **Interpreta el resultado** en el contexto del problema y con la unidad que pide el enunciado. Si te preguntan un porcentaje, responde en porcentaje.

Redondeo. En Canarias la norma es redondear a **cuatro decimales**, y es una buena costumbre general: con dos decimales, un resultado intermedio arrastra error y el resultado final puede no cuadrar con el del corrector. Guarda los decimales hasta el final y redondea solo al escribir la respuesta.

7.3. Los errores que restan puntos

- Confundir el «o» con el «y», es decir, la unión con la intersección.
- Usar $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ sin que el enunciado diga que son independientes ni haberlo comprobado.
- Aplicar las leyes de Morgan a una intersección mixta como $A \cap \overline{B}$, donde no valen.
- Escribir la condicionada al revés: $P(A \mid B)$ y $P(B \mid A)$ no son lo mismo, y confundirlas cambia el denominador.
- Dar por bueno un resultado mayor que 1 o negativo.
- No definir los sucesos y no interpretar el resultado final en el contexto.

8. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

Sean A y B dos sucesos de los que se sabe que $P(A) = 0{,}4$, $P(A \cup B) = 0{,}8$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}7$. Determina si A y B son independientes.

Solución 1

Para decidir la independencia hay que comparar $P(A \cap B)$ con $P(A) \cdot P(B)$, y no tenemos ninguno de los dos. Los sacamos de los datos.

La intersección, con Morgan. Como $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, el dato $0{,}7$ es la probabilidad del contrario de la intersección:

$$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3.$$

La probabilidad de B, con la fórmula de la unión:

$$0{,}8 = 0{,}4 + P(B) - 0{,}3 \quad \Longrightarrow \quad P(B) = 0{,}8 - 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7.$$

La comprobación:

$$P(A \cap B) = 0{,}3 \qquad \text{frente a} \qquad P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28.$$

Como $0{,}3 \neq 0{,}28$, no se cumple la condición de independencia: los sucesos son **dependientes**. Observa que la respuesta no es un número, es una conclusión, y hay que escribirla. Un examen que llegue a $0{,}3$ y $0{,}28$ y no diga qué significa deja puntos en la mesa.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

Ejercicio 2

Sean A y B dos sucesos **independientes** con $P(A) = 0{,}3$ y $P(\overline{B}) = 0{,}25$. Calcula:

a) $P(A \cup B)$.

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

c) $P(A \mid \overline{B})$.

Solución 2

Primero, la probabilidad que falta: $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

a) Para la unión hace falta la intersección, y aquí sí podemos usar el producto porque el enunciado dice que son independientes:

$$P(A \cap B) = 0{,}3 \cdot 0{,}75 = 0{,}225, \qquad P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}75 - 0{,}225 = 0{,}825.$$

b) Por Morgan, $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$, así que

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}825 = 0{,}175.$$

c) Es una condicionada con la condición negada:

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}.$$

El denominador lo tenemos, $0{,}25$. El numerador es la intersección mixta, y ahí Morgan no vale: hay que ir al diagrama de Venn. $A \cap \overline{B}$ es la parte de la burbuja de A que queda fuera de B, esa media luna, es decir la burbuja completa menos el solape:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}3 - 0{,}225 = 0{,}075.$$

Y por tanto

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{0{,}075}{0{,}25} = 0{,}3.$$

Que salga exactamente $P(A)$ no es casualidad: si A y B son independientes, A también lo es de $\overline{B}$, y condicionar por algo independiente no cambia la probabilidad. Es una buena comprobación de que el apartado está bien.

Ejercicio 3

En un centro de enseñanza secundaria, el $45\,\%$ de los alumnos juega al fútbol, el $60\,\%$ practica atletismo y, de los que practican atletismo, el $50\,\%$ juega al fútbol.

a) ¿Qué porcentaje de alumnos practica ambos deportes?

b) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no practique ninguno de los dos?

c) Si un alumno no juega al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que practique atletismo?

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

Solución 3

Definimos los sucesos: F = «juega al fútbol», T = «practica atletismo». Los datos del enunciado son

$$P(F) = 0{,}45, \qquad P(T) = 0{,}60, \qquad P(F \mid T) = 0{,}50.$$

El tercero es el que más se falla: «de los que practican atletismo, el $50\,\%$ juega al fútbol» no es $P(F)$ ni $P(F \cap T)$, es una **condicionada**, porque restringe la población a los que hacen atletismo.

a) Nos piden $P(F \cap T)$. Despejamos de la condicionada:

$$P(F \mid T) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)} \quad \Longrightarrow \quad P(F \cap T) = P(F \mid T) \cdot P(T) = 0{,}50 \cdot 0{,}60 = 0{,}30.$$

El $30\,\%$ de los alumnos practica los dos deportes. Fíjate en que no podíamos usar el producto $P(F) \cdot P(T)$: nadie ha dicho que sean independientes, y de hecho no lo son, porque $0{,}45 \cdot 0{,}60 = 0{,}27 \neq 0{,}30$.

b) «Ni fútbol ni atletismo» es $\overline{F} \cap \overline{T}$, que por Morgan es el contrario de la unión:

$$P(F \cup T) = 0{,}45 + 0{,}60 - 0{,}30 = 0{,}75, \qquad P(\overline{F} \cap \overline{T}) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$$

La probabilidad es $0{,}25$, es decir, un $25\,\%$ de los alumnos no practica ninguno de los dos.

c) La condición es «no juega al fútbol», así que va debajo de la raya:

$$P(T \mid \overline{F}) = \frac{P(T \cap \overline{F})}{P(\overline{F})}.$$

Denominador: $P(\overline{F}) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$. Numerador: media luna otra vez,

$$P(T \cap \overline{F}) = P(T) - P(T \cap F) = 0{,}60 - 0{,}30 = 0{,}30.$$

Y ojo con un detalle que ahorra tiempo: la intersección no tiene orden, $F \cap T$ y $T \cap F$ son la misma cosa, así que reutilizamos el $0{,}30$ del apartado a). Por tanto

$$P(T \mid \overline{F}) = \frac{0{,}30}{0{,}55} = 0{,}5455.$$

De los alumnos que no juegan al fútbol, aproximadamente el $54{,}55\,\%$ practica atletismo.

Ejercicio 4

Se lanza un dado. Se consideran los sucesos A = «salir par», B = «salir múltiplo de 3» y C = «salir impar». Razona si son compatibles o incompatibles, y si son dependientes o independientes, cada uno de los pares A y B, y A y C.

Solución 4

Los sucesos son $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$ y $C = \{1, 3, 5\}$, con

$$P(A) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}, \qquad P(B) = \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3}, \qquad P(C) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

El par A y B. $A \cap B = \{6\} \neq \varnothing$, así que son **compatibles**. Para la independencia:

$$P(A \cap B) = \tfrac{1}{6} \qquad \text{y} \qquad P(A) \cdot P(B) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}.$$

Coinciden, así que A y B son **independientes**. Es un caso interesante: saber que ha salido múltiplo de 3 no cambia la probabilidad de que sea par.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

El par A y C. No hay ningún número par e impar a la vez, así que $A \cap C = \varnothing$ y son **incompatibles**. Y entonces

$$P(A \cap C) = 0 \qquad \text{frente a} \qquad P(A) \cdot P(C) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} \neq 0,$$

luego son **dependientes**. Tiene todo el sentido: si sabes que ha salido par, la probabilidad de que sea impar pasa a ser cero.
Este ejercicio es la demostración de que las dos clasificaciones son independientes entre sí: tenemos un par compatible e independiente y un par incompatible y dependiente.

Ejercicio 5

De dos sucesos A y B se sabe que $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ y $P(A \cap B) = 0{,}2$. Calcula:

a) La probabilidad de que ocurra alguno de los dos.

b) La probabilidad de que ocurra B pero no A.

c) $P(B \mid A)$ y $P(A \mid B)$, y comprueba que son distintas.

Solución 5

a) «Alguno de los dos» es la unión:

$$P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}7.$$

b) «B pero no A» es $B \cap \overline{A}$, la media luna de B:

$$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2.$$

c) Las dos condicionadas, con la misma intersección y distinto denominador:

$$P(B \mid A) = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4, \qquad P(A \mid B) = \frac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5.$$

Son distintas, y esa es la moraleja: el numerador es común, pero la condición cambia el denominador. Escribir una en lugar de la otra es uno de los fallos más caros del bloque.
De paso, aquí se ve que A y B son dependientes, porque $P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2\ldots$ que coincide con la intersección. Es decir: en este caso concreto **sí son independientes**. Y encaja con lo anterior, porque $P(B \mid A) = 0{,}4 = P(B)$ y $P(A \mid B) = 0{,}5 = P(A)$: condicionar no ha cambiado nada.

Ejercicio 6

En una empresa, el $70\,\%$ de los empleados tiene carné de conducir y el $40\,\%$ usa el coche para ir al trabajo. Se sabe además que todos los que usan el coche tienen carné. Calcula la probabilidad de que un empleado elegido al azar tenga carné y no use el coche, y la probabilidad de que use el coche sabiendo que tiene carné.

Solución 6

Sucesos: L = «tiene carné», V = «usa el coche». Datos: $P(L) = 0{,}70$ y $P(V) = 0{,}40$.
La frase «todos los que usan el coche tienen carné» dice que V está contenido en L, y por tanto

$$V \cap L = V \quad \Longrightarrow \quad P(V \cap L) = P(V) = 0{,}40.$$

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

Merece la pena dibujarlo: la burbuja de V está *dentro* de la de L.
Carné y no coche, la media luna de L:

$$P(L \cap \overline{V}) = P(L) - P(L \cap V) = 0{,}70 - 0{,}40 = 0{,}30.$$

Coche sabiendo que tiene carné:

$$P(V \mid L) = \frac{P(V \cap L)}{P(L)} = \frac{0{,}40}{0{,}70} = 0{,}5714.$$

Es decir, algo más del $57\,\%$ de quienes tienen carné lo usan para ir al trabajo. Y comprobación rápida: $P(V \mid L) = 0{,}5714$ es mayor que $P(V) = 0{,}40$, lo que tiene sentido, porque tener carné hace más probable usar el coche. Los sucesos son claramente dependientes.

9. Resumen operativo

Lo que hay que llevarse a la mesa del examen:

- **Laplace:** $P(A) = \text{CF}/\text{CP}$, con los casos posibles del espacio muestral.
- **Contrario:** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Y siempre $0 \leq P \leq 1$.
- **Unión:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Suma directa solo si son incompatibles.
- **Intersección:** producto $P(A) \cdot P(B)$ solo si son independientes; en general, $P(A) \cdot P(B \mid A)$.
- **Condicionada:** $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$. La condición va debajo.
- **Morgan:** «ni A ni B» $= 1 - P(A \cup B)$; «no A o no B» $= 1 - P(A \cap B)$.
- **Media luna:** $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$. Es la que resuelve las condicionadas negadas.
- **Independencia:** se comprueba, no se supone, con $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- Define los sucesos por escrito, traduce cada dato, interpreta el resultado y redondea a cuatro decimales.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución