TEMA 1.1

MATEMÁTICAS II · 2.º Bachillerato · PAU 2027

Funciones elementales

Las ocho familias de funciones con las que vas a trabajar todo el curso, y cómo reconocer cada una de un vistazo.

Contenido del tema

1. Para qué sirve este tema . . . 2
2. Qué es una función . . . 2
3. Las dos caras de una función . . . 3
4. Los ejes de coordenadas: abscisas y ordenadas . . . 3
5. La notación $f(x)$ y los problemas contextualizados . . . 4
6. El catálogo de funciones elementales . . . 5
7. Cómo se representa una función a mano . . . 8
8. Dónde vas a usar esto durante el curso . . . 10
9. Ejercicios resueltos . . . 10
10. Resumen operativo . . . 13

Edición, ampliación y maquetación: Academia Pitágoras.

© Isaías Dávila Delgado · Academia Pitágoras. Material de uso exclusivo del alumnado matriculado. Prohibida su reproducción y distribución.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

1. Para qué sirve este tema

Este es el primer tema del curso y el primero del bloque de **análisis de funciones**, que es el bloque más grande de Matemáticas II y el que más pesa en el examen: en la mayoría de comunidades vale el **40 %** de la nota, y en Andalucía, Cataluña y Asturias puede llegar al 50 % si el alumno elige las opciones de análisis.

Nadie te va a preguntar en la **PAU** qué es una función. Lo que va a pasar es otra cosa, y va a pasar en todos los ejercicios del bloque: te van a dar una expresión y **lo primero que tienes que hacer es reconocer de qué familia es**, porque de eso depende todo lo que viene después. El dominio de una función racional se calcula de una manera y el de una irracional de otra. Una exponencial tiene asíntota horizontal y una logarítmica la tiene vertical. Una parábola tiene su vértice donde una racional tiene su asíntota. Si te equivocas al identificar la familia, el resto del ejercicio ya no se puede salvar.

Qué entra en este tema y qué no. Aquí se ve *qué* es una función, cómo se expresa y qué forma tiene cada familia. El **dominio** y el **recorrido** son el tema siguiente. Los **límites**, las **asíntotas** y la **continuidad** vienen después, y la **monotonía** y la **curvatura** con las derivadas. Cuando aquí se hable de asíntotas o de crecimiento será de forma descriptiva, para que reconozcas el dibujo; el cálculo llega a su tiempo.

Idea clave. Este tema no se estudia, se **memoriza visualmente**. El objetivo es que al ver $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ ya te venga a la cabeza una hipérbola con dos asíntotas, sin hacer una sola cuenta. Esa asociación instantánea entre expresión y dibujo es lo que después te permite detectar que un resultado está mal antes de terminar el ejercicio.

2. Qué es una función

Definición 2.1 · *Función*

Una función es la **relación entre dos variables**, de modo que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda.

Una variable es, como dice su nombre, algo cuyo valor puede variar. Y prácticamente cualquier dato de la vida real puede variar: la altura, el peso, el dinero, los ingresos de una empresa, la velocidad, el tiempo, el número de personas contagiadas en una epidemia. Lo que hace una función es coger **dos** de esos datos y decir cómo varían de forma conjunta, uno en función del otro.

De las dos variables, una manda y la otra obedece:

- la **variable independiente** es la que cambia de valor sin depender de nada;
- la **variable dependiente** es la que cambia *porque* ha cambiado la otra.

Cuatro ejemplos que van a volver a lo largo de todo el tema:

Situación	Independiente	Dependiente
Peso de una persona según su altura	la altura	el peso
Ingresos de una tienda según el precio de venta	el precio	los ingresos
Posición de un vehículo según el tiempo	el tiempo	la posición
Contagios de una epidemia según el tiempo	el tiempo	los contagios

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

Fíjate en que la elección no es arbitraria. La altura de una persona depende sobre todo de la genética y no de lo que pese; el peso, en cambio, sí tiene que ver con la altura. El precio de un producto lo decide el comerciante mirando el mercado; los ingresos son consecuencia de ese precio. Y el tiempo es el caso más claro de todos: el tiempo pasa haga uno lo que haga, así que **cuando el tiempo aparece en un problema, es siempre la variable independiente**.

> Ese último caso es un regalo. En cualquier problema donde intervenga el tiempo ya sabes cuál es la variable independiente sin pensarlo, y eso resuelve la mitad del planteamiento.

3. Las dos caras de una función

Una misma función se puede escribir de dos maneras, y las dos dicen exactamente lo mismo:

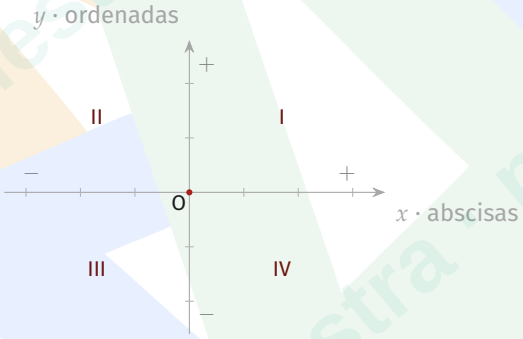
1. con una **expresión algebraica**, es decir, una fórmula: $f(x) = 2x - 6$;
2. con una **representación gráfica**, es decir, un dibujo en unos ejes de coordenadas.

Todas las ecuaciones que has visto a lo largo de los años —de primer grado, de segundo grado, bicuadradas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas— tienen su propio dibujo. Y ese dibujo es siempre reconocible: cada familia de expresiones dibuja siempre el mismo tipo de curva. A la representación gráfica de una función se la llama, de forma genérica, la **curva** de la función, aunque sea una recta.

Todo el bloque de análisis consiste, en el fondo, en pasar de una cara a la otra: de la fórmula al dibujo, y del dibujo a las conclusiones.

4. Los ejes de coordenadas: abscisas y ordenadas

El dibujo se hace en los **ejes de coordenadas cartesianas**: un eje horizontal y otro vertical que se cortan en el **origen de coordenadas** y dividen el plano en **cuatro cuadrantes**.



Los dos ejes tienen nombre propio, y estos dos nombres hay que sabérselos porque los enunciados los usan tal cual:

- el eje horizontal, el de las x, es el **eje de abscisas**;
- el eje vertical, el de las y, es el **eje de ordenadas**.

Es muy habitual que un ejercicio diga «considera el punto de la curva de abscisa $x = 2$» o «halla el punto de corte con el eje de ordenadas». Si no tienes claro cuál es cuál, el enunciado se vuelve ilegible.

Y ahora la regla que organiza todo el dibujo:

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

Propiedad 4.1 · *Dónde va cada variable*

La **variable independiente** va **siempre** en el eje de abscisas, el horizontal. La **variable dependiente** va **siempre** en el eje de ordenadas, el vertical.

Este es el error más repetido al empezar un problema contextualizado, y es un error caro porque arrastra todo el ejercicio. Antes de dibujar un solo eje, decide en voz alta cuál de las dos variables depende de la otra. La que depende va arriba.

5. La notación $f(x)$ y los problemas contextualizados

Cuando la función no representa nada concreto, la variable independiente se llama x y la dependiente se llama y. Pero en este tema la y se escribe casi siempre de otra forma:

$$y = f(x).$$

Se lee «f de x», y significa exactamente «el valor que toma la función cuando la variable independiente vale x». La notación es mejor que la y porque lleva escrito dentro de qué depende: en $f(x)$ se ve que el resultado depende de x.

Cuando la función sí representa algo, se cambian las letras por las que tienen sentido:

Situación	Notación
Peso en función de la altura	$P(h)$
Ingresos en función del precio	$I(p)$
Posición en función del tiempo	$r(t)$
Contagios en función del tiempo	$C(t)$

Esto no es un capricho de notación: los problemas contextualizados de la PAU vienen escritos así, y hay que saber leer del enunciado qué variables intervienen, cuál es la independiente y cuál la dependiente.

Solo el primer cuadrante. En los problemas contextualizados casi nunca se dibujan los cuatro cuadrantes, porque hay variables que no admiten valores negativos: no existe un tiempo negativo, ni un precio negativo, ni el peso negativo de una persona. Cuando el enunciado tiene contexto, lo normal es quedarse **solo con el primer cuadrante**, y a veces el propio enunciado te da el intervalo en el que la función tiene sentido.

Interpretadas en los ejes, las cuatro funciones de los ejemplos se comportan así. El peso crece de forma sostenida con la altura. Los ingresos crecen con el precio hasta cierto punto y después bajan, porque si subes demasiado el precio la gente se va a la competencia: hay un tramo creciente y otro decreciente. La posición de un vehículo puede hacer casi cualquier cosa, alejarse, acercarse y volver a alejarse. Y la curva de contagios de una epidemia sube, alcanza un máximo —lo que en la pandemia se llamó «doblegar la curva»— y luego baja, y después vuelve a subir en la ola siguiente.

Esos máximos y esos tramos crecientes y decrecientes tienen nombre técnico y se calculan con derivadas, más adelante en el bloque. Por ahora basta con que veas que la forma de la curva *cuenta* lo que pasa en el problema.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

6. El catálogo de funciones elementales

Estas son las ocho familias. De cada una interesan tres cosas: cómo se reconoce la expresión, qué forma tiene el dibujo y qué detalle hay que mirar primero.

6.1. Funciones lineales o afines

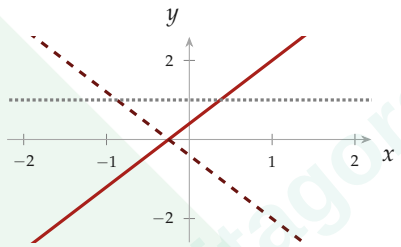
Su expresión es un polinomio de **primer grado**:

$$f(x) = mx + n,$$

donde m y n son números cualesquiera. Su gráfica es **siempre una recta**, sin excepción.

Los dos coeficientes tienen nombre y significado:

- m es la **pendiente**: mide la inclinación de la recta. Si $m > 0$ la recta es **creciente**; si $m < 0$ es **decreciente**; y si $m = 0$ no hay inclinación y la recta es **horizontal**, es decir, la función es constante. Cuanto mayor es $|m|$, más empinada va la recta.
- n es la **ordenada en el origen**: es el valor de la función en $x = 0$ y por tanto el **punto de corte con el eje de ordenadas**, que está en $(0, n)$.



> Con solo mirar el número que acompaña a la x ya sabes si la recta sube, baja o va horizontal. Es la lectura más rentable de todo el tema: cuesta un segundo y no falla nunca.

6.2. Funciones cuadráticas

Su expresión es un polinomio de **segundo grado**:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0,$$

y su gráfica es una **parábola**.

Cada coeficiente hace una cosa distinta:

- el **signo de** a decide hacia dónde abre: si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba y tiene un mínimo; si $a < 0$ abre hacia abajo y tiene un máximo;
- el **valor de** $|a|$ decide lo abierta que es: valores grandes dan parábolas estrechas, valores pequeños parábolas anchas;
- b desplaza la curva a izquierda o derecha;
- c es, igual que en la recta, el **corte con el eje de ordenadas**: $f(0) = c$.

El punto más importante de una parábola es su **vértice**, que es donde alcanza el máximo o el mínimo. Su abscisa se calcula con una fórmula que conviene tener a mano:

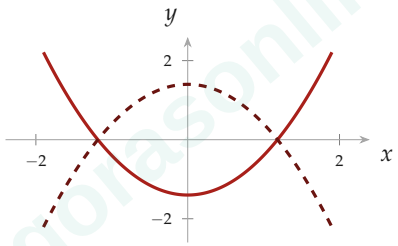
Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

Propiedad 6.1 · *Vértice de una parábola*

El vértice de $f(x) = ax^2 + bx + c$ está en

$$x_V = \frac{-b}{2a}, \qquad y_V = f(x_V).$$

Es la fórmula de las soluciones de la ecuación de segundo grado a la que se le ha quitado la raíz cuadrada. De ahí es fácil de recordar: la misma fórmula, sin el trozo del radical.



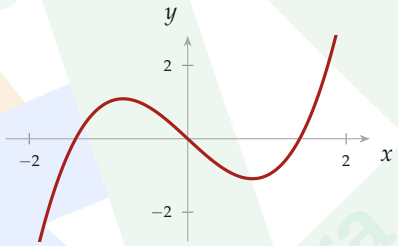
Cuidado con «cóncava» y «convexa». Los dos términos se usan al revés según el autor: hay libros donde la parábola que abre hacia arriba es cóncava y otros donde es convexa, porque depende de si la miras desde arriba o desde abajo. Para no equivocarte, en el examen escribe además **qué significa**: «abre hacia arriba, tiene un mínimo». Eso no admite interpretación.

6.3. Funciones polinómicas de grado superior

Cuando el polinomio es de grado tres o más:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

la curva se complica, pero de una forma bastante ordenada: aparecen varias subidas y bajadas encadenadas, como parábolas pegadas una detrás de otra. Una de grado tres tiene dos tramos, una de grado cuatro tiene tres, y en general una de grado n tiene como máximo $n - 1$ cambios de dirección.



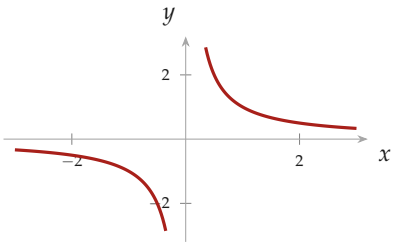
6.4. Funciones racionales

Son las que tienen la variable en el **denominador**: un cociente de dos polinomios,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Su gráfica es del tipo **hipérbola**: dos ramas separadas que se acercan indefinidamente a unas rectas sin llegar a tocarlas. Esas rectas son las **asíntotas**, y son la marca de esta familia. El caso más sencillo es la proporcionalidad inversa, $f(x) = \dfrac{k}{x}$, cuyas asíntotas son los propios ejes.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución



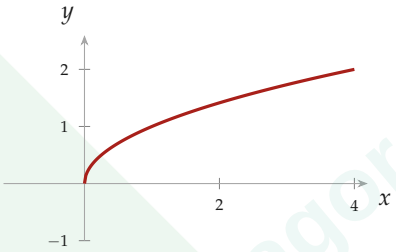
Cuantos más grados tengan el numerador y el denominador, más asíntotas puede haber y más variada es la forma. Las asíntotas se calculan con límites, más adelante.

6.5. Funciones irracionales

Son las que tienen la variable **dentro de una raíz**:

$$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}.$$

Cuando el índice es par la curva **arranca en un punto y no existe antes de él**, porque no se puede hacer la raíz par de un número negativo. Ese arranque brusco es su seña de identidad.



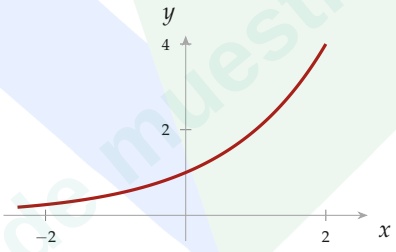
> Aquí está la primera conexión con el tema siguiente: decidir dónde arranca la curva es calcular su dominio, y para eso hay que resolver una inecuación. Si el bloque o te queda lejos, este es el momento de repasar el tema de inecuaciones.

6.6. Funciones exponenciales

La variable está en el **exponente**:

$$f(x) = a^x, \qquad a > 0,\ a \neq 1.$$

Lo característico es la velocidad: crece mucho más rápido que cualquier polinomio. Es la forma que tenía la curva de contagios de una epidemia al principio, cuando todavía no se había frenado. Tiene una **asíntota horizontal**: por el lado en que decrece, la curva se pega al eje de abscisas sin tocarlo nunca.



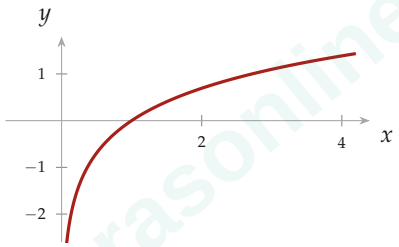
Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

6.7. Funciones logarítmicas

Son las **inversas** de las exponenciales:

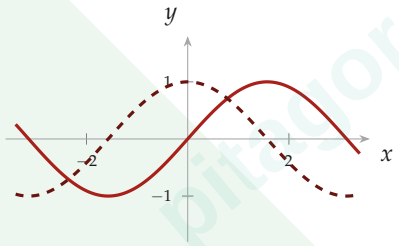
$$f(x) = \log_a x.$$

Al ser inversas, su gráfica es la de la exponencial reflejada, y por eso su asíntota también cambia de orientación: la exponencial tiene asíntota **horizontal** y la logarítmica la tiene **vertical**. La curva arranca pegada al eje de ordenadas y crece cada vez más despacio.



6.8. Funciones trigonométricas

Las que se usan son el seno, el coseno y la tangente. El seno y el coseno dibujan **ondas**: la misma forma repetida indefinidamente, y son la misma onda desplazada una respecto de la otra. Son las funciones con las que se describe cualquier fenómeno que se repite. La tangente es distinta: no es una onda, sino una sucesión de ramas separadas por **asíntotas verticales**.



7. Cómo se representa una función a mano

Más adelante en el curso vas a representar funciones con todo el aparato del análisis: dominio, cortes, asíntotas, monotonía, curvatura. Pero hay un método anterior a todo eso, el que has usado desde la ESO, que sigue siendo válido y que **te va a salvar más de una vez**: la **tabla de valores**.

Consiste en elegir unos valores de x, sustituirlos en la función, calcular el valor de y que sale, y llevar cada pareja (x, y) al dibujo como un punto.

Tres puntos, no dos. Para una recta bastan dos puntos, pero conviene calcular **tres**. El motivo es de control de errores: con dos puntos siempre te sale una recta, así que si te has equivocado en una cuenta no te vas a enterar. Con el tercero, si no está alineado con los otros dos, sabes que hay un fallo.

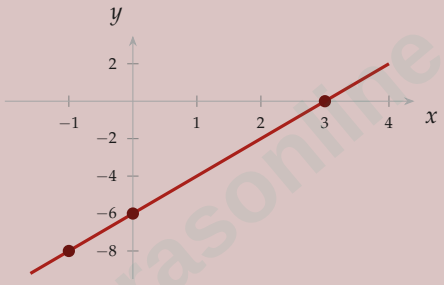
Ejemplo 7.1 · *Representar la recta* $f(x) = 2x - 6$

Elegimos tres valores sencillos alrededor del cero:

x	-1	0	3
$f(x)$	-8	-6	0

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

Las cuentas, una a una: $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 6 = -8$; $f(0) = -6$; $f(3) = 2 \cdot 3 - 6 = 0$. Llevamos los tres puntos $(-1, -8)$, $(0, -6)$ y $(3, 0)$ al dibujo y los unimos: quedan alineados, así que las cuentas están bien.
Comprobación rápida con lo que ya sabes: la pendiente es $m = 2 > 0$, así que la recta tiene que ser creciente, y lo es. Y la ordenada en el origen es $n = -6$, así que tiene que cortar el eje vertical en $(0, -6)$, y lo hace.



Con una parábola el procedimiento es el mismo, pero con una precaución: si eliges los valores al azar puedes perderte el vértice, que es justo el punto que da su forma a la curva. Así que **primero se calcula el vértice y después se hace la tabla alrededor de él**.

Ejemplo 7.2 · *Representar la parábola* $f(x) = x^2 - x - 4$

Paso 1 · orientación. $a = 1 > 0$, así que abre hacia arriba y tiene un mínimo.
Paso 2 · el vértice. Aquí $a = 1$ y $b = -1$. Ojo con el signo: cuando delante de la x no hay número, el coeficiente es 1, y aquí hay un menos, así que $b = -1$.

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

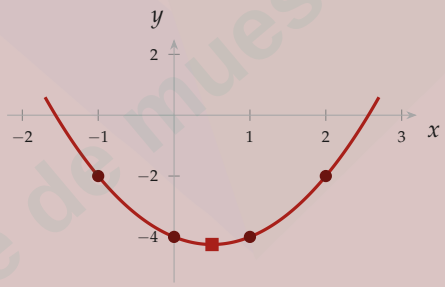
Ya sabemos que el vértice está a la altura de $x = \frac{1}{2}$, pero todavía no si está arriba o abajo. Lo averiguamos sustituyendo:

$$y_V = f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2} - 4 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} - 4 = -\tfrac{17}{4} = -4{,}25.$$

El vértice es el punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{17}{4}\right)$.
Paso 3 · la tabla, alrededor del vértice. Como el vértice está en $x = \frac{1}{2}$, elegimos valores repartidos a un lado y a otro:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	-4	-4	-2

Fíjate en la simetría de los resultados: $f(0) = f(1) = -4$ y $f(-1) = f(2) = -2$. Eso no es casualidad, es que la parábola es simétrica respecto de la vertical que pasa por el vértice, y es otra comprobación gratis de que las cuentas van bien.



Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

8. Dónde vas a usar esto durante el curso

El bloque de análisis consiste en estudiar una función a fondo, y ese estudio siempre sigue el mismo guion, en este orden:

1. **Dominio**: para qué valores de x existe la función. Es el tema siguiente.
2. **Puntos de corte con los ejes** y signo de la función por regiones.
3. **Límites**, que son la herramienta que hace falta para los dos pasos siguientes.
4. **Asíntotas**: las rectas a las que la curva se acerca sin tocarlas.
5. **Continuidad**: si la curva se puede trazar de un trazo o tiene saltos.
6. **Monotonía**: dónde crece y dónde decrece. Con la primera derivada.
7. **Curvatura**: dónde es cóncava y dónde convexa. Con la segunda derivada.
8. **Representación gráfica**, que es la síntesis de todo lo anterior.

Cada uno de esos pasos es un tema del curso, y en todos ellos lo primero es **reconocer la familia**: el dominio de una racional se calcula anulando el denominador, el de una irracional resolviendo una inecuación y el de una logarítmica exigiendo que el argumento sea positivo. Tres respuestas distintas a la misma pregunta, y lo único que las distingue es haber identificado bien la función.

Y hay un uso más inmediato. En casi todas las comunidades el examen incluye al menos un problema **contextualizado** de análisis, obligatorio, con un modelo real y una función dada: una concentración de un medicamento en sangre, la superficie de una mancha, el beneficio de una empresa. Ese problema empieza siempre por lo mismo: leer el enunciado, decidir cuál es la variable independiente y reconocer qué tipo de función te han dado. Este tema es literalmente el primer paso de ese ejercicio.

9. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

Di a qué familia pertenece cada función y qué forma tendrá su gráfica:

$$a)\ f(x)=\frac{3x-1}{x+2} \qquad b)\ g(x)=5-2x \qquad c)\ h(x)=\sqrt{x-1}$$

$$d)\ p(x)=3^x \qquad e)\ q(x)=-2x^2+8x \qquad f)\ s(x)=\log_2 x$$

Solución 1

a) Racional: la variable está en el denominador. Hipérbola con dos ramas y dos asíntotas.
b) Lineal o afín, polinomio de primer grado. Recta, y además decreciente porque la pendiente es $m=-2<0$. Corta el eje de ordenadas en $(0,5)$.
c) Irracional de índice par. Curva que arranca en un punto y sigue creciendo despacio; aquí arranca en $x=1$, que es donde el radicando se anula.
d) Exponencial. Crecimiento rápido con asíntota horizontal en el eje de abscisas.
e) Cuadrática. Parábola, y como $a=-2<0$ abre hacia abajo, así que tiene un máximo.
f) Logarítmica. Inversa de la exponencial, con asíntota vertical en el eje de ordenadas.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

Ejercicio 2

Sin dibujarlas, ordena estas cuatro rectas de la **más empinada** a la más tendida, y di cuáles crecen y cuáles decrecen:

$$y = 5x - 1 \qquad y = -\tfrac{1}{2}x + 3 \qquad y = \tfrac{1}{4}x \qquad y = -4x + 2$$

Solución 2

Lo empinada que va una recta lo decide la pendiente, pero **en valor absoluto**: da igual que suba o que baje, lo que cuenta es cuánto se inclina. Las cuatro pendientes son

$$5, \qquad -\tfrac{1}{2}, \qquad \tfrac{1}{4}, \qquad -4,$$

y en valor absoluto, $5 > 4 > \tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{4}$. Así que el orden, de la más empinada a la más tendida, es

$$y = 5x - 1, \qquad y = -4x + 2, \qquad y = -\tfrac{1}{2}x + 3, \qquad y = \tfrac{1}{4}x.$$

Y el crecimiento lo decide el **signo**: crecen $y = 5x - 1$ y $y = \tfrac{1}{4}x$, porque tienen pendiente positiva; decrecen $y = -4x + 2$ y $y = -\tfrac{1}{2}x + 3$.
Fíjate en $y = \tfrac{1}{4}x$: no tiene término independiente, o sea $n = 0$. Eso significa que corta al eje de ordenadas en $(0, 0)$, es decir, que **pasa por el origen**.
Y compara las dos primeras: $y = 5x - 1$ y $y = -4x + 2$ son casi igual de inclinadas, pero una sube y la otra baja. Empinada y creciente no son lo mismo.

Ejercicio 3

Dada $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, di hacia dónde abre la parábola, halla su vértice y su corte con el eje de ordenadas, y haz una tabla de valores alrededor del vértice.

Solución 3

Orientación. $a = -1 < 0$, así que abre hacia abajo y el vértice es un **máximo**.
Vértice. Con $a = -1$ y $b = 4$:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2, \qquad y_V = f(2) = -4 + 8 - 3 = 1.$$

El vértice es $(2, 1)$. Fíjate en el signo: el -4 de arriba y el -2 de abajo se cancelan y sale positivo. Es el fallo más habitual en las parábolas que abren hacia abajo.
Corte con el eje de ordenadas. Es directamente el término independiente: $f(0) = -3$, punto $(0, -3)$.
Tabla alrededor del vértice. Como el vértice está en $x = 2$, tomamos dos valores a cada lado:

x	0	1	3	4
$f(x)$	-3	0	0	-3

Las cuentas: $f(1) = -1 + 4 - 3 = 0$ y $f(3) = -9 + 12 - 3 = 0$. Y otra vez la simetría, $f(0) = f(4) = -3$ y $f(1) = f(3) = 0$, porque 0 y 4 están a la misma distancia del 2, igual que 1 y 3.
Con el vértice y estos cuatro puntos ya tienes la parábola dibujada.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

Ejercicio 4

Completa una tabla de valores para $f(x) = 2^x$ y para $g(x) = x^2$ con $x = 1, 2, 3, 4, 5$ y contesta: ¿cuál de las dos crece más rápido?

Solución 4

x	1	2	3	4	5
2^x	2	4	8	16	32
x^2	1	4	9	16	25

Lo interesante es que no gana la misma en todo el recorrido. En $x = 2$ y en $x = 4$ las dos valen lo mismo, y entre esos dos valores la parábola va por delante: en $x = 3$ vale 9 frente a 8.
Pero a partir de $x = 4$ la exponencial se despega y ya no la alcanza nadie: en $x = 5$ va 32 frente a 25, y la diferencia crece sin parar. La conclusión es la que hay que recordar: **a la larga una exponencial siempre crece más rápido que cualquier potencia**, aunque en los primeros valores pueda parecer lo contrario.

Ejercicio 5

Un depósito se está vaciando. El volumen de agua que contiene, en litros, viene dado por

$$V(t) = 200 - 5t,$$

donde t son los minutos transcurridos. Di de qué familia es la función, cuál es la variable independiente, qué significan la pendiente y la ordenada en el origen *en este problema*, y en qué cuadrante se trabaja.

Solución 5

Es una función **lineal**: un polinomio de primer grado, así que su gráfica es una recta.
Interviene el tiempo, luego la respuesta está decidida: t es la **variable independiente** y va en el eje horizontal; el volumen V es la dependiente y va en el vertical.
Y ahora la parte que de verdad se pregunta en el examen, la interpretación:
La **pendiente** es $m = -5$. En este problema significa que el depósito pierde **5 litros por minuto**. Y que sea *negativa* no es un detalle: es lo que dice que el depósito se está vaciando y no llenando. Si la pendiente fuera positiva, el enunciado estaría hablando de otra cosa.
La **ordenada en el origen** es $n = 200$. Es el valor en $t = 0$, así que es el **volumen inicial**: los litros que había en el depósito cuando empezamos a contar el tiempo.
Se trabaja en el **primer cuadrante**: no hay minutos negativos ni litros negativos. Y con una tabla se ve enseguida hasta dónde tiene sentido el problema:

t	0	10	20	40
$V(t)$	200	150	100	0

A los 40 minutos el depósito está vacío. A partir de ahí la fórmula daría volúmenes negativos, que no significan nada.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución

Ejercicio 6

Un enunciado dice: «la temperatura T de un horno, en grados, en función de los minutos t transcurridos desde que se enciende». Sin hacer ninguna cuenta, contesta: ¿qué variable va en cada eje?, ¿cómo se escribe la función?, ¿en qué cuadrante se trabaja?

Solución 6

Interviene el tiempo, así que la respuesta está decidida de antemano: **el tiempo es siempre la variable independiente**, porque pasa haga uno lo que haga. La temperatura es la dependiente, porque depende de cuánto tiempo lleve el horno encendido.
Por tanto t va en el **eje de abscisas** y T en el **eje de ordenadas**, y la función se escribe $T(t)$.
Se trabaja **solo en el primer cuadrante**: no hay minutos negativos desde que se enciende el horno, y la temperatura tampoco va a ser negativa en este contexto. Además el problema tendrá sentido solo en un intervalo de tiempo concreto, que normalmente lo da el propio enunciado.

10. Resumen operativo

- **Función:** relación entre dos variables. La **independiente** manda y va en el eje de **abscisas**; la **dependiente** obedece y va en el eje de **ordenadas**. Si aparece el tiempo, el tiempo es la independiente.
- **Notación:** $y = f(x)$ en las funciones abstractas; con letras con significado, $P(h)$, $I(p)$, $r(t)$, en las contextualizadas. En estas se trabaja en el primer cuadrante.
- **Recta** $mx + n$: $m > 0$ creciente, $m < 0$ decreciente, $m = 0$ constante. n es el corte con el eje de ordenadas.
- **Parábola** $ax^2 + bx + c$: el signo de a dice si abre arriba o abajo, c es el corte con el eje de ordenadas, y el vértice está en $x_V = \dfrac{-b}{2a}$, con $y_V = f(x_V)$.
- **Polinómica de grado** n**:** hasta $n - 1$ cambios de dirección.
- **Racional:** variable en el denominador, hipérbola, asíntotas.
- **Irracional:** variable dentro de la raíz; con índice par, la curva arranca en un punto.
- **Exponencial:** variable en el exponente, crecimiento muy rápido, asíntota horizontal. **Logarítmica:** su inversa, asíntota vertical.
- **Trigonométricas:** seno y coseno son la misma onda desplazada; la tangente son ramas separadas por asíntotas verticales.
- **Tabla de valores:** tres puntos para una recta, no dos. En una parábola, primero el vértice y después la tabla alrededor de él.

Material de muestra de Academia Pitágoras · pitagorasonline.com · Prohibida su distribución